

# Dobór parametrów algorytmu astrometrii w projekcie „Pi of the Sky“

Krystian Zawistowski

19 sierpnia 2014

## Streszczenie

Zajmowano się optymalizacją algorytmu astrometrycznego ze względu na liczbę pikseli  $n$  użytych do wyznaczenia wstępnej pozycji gwiazdy i apertury  $r$  tj rozmiaru koła wokół niej, z którego algorytm brał piksele do obliczania poprawki, a także doborem odpowiedniego czasu  $t$  ekspozycji. Stwierdzono, że dla jasnych gwiazd, poniżej 7 mag najlepiej zastosować czas ekspozycji 3 s i  $n = 25$ . Dla gwiazd ciemniejszych niż 8 mag najlepszy okazał się  $t = 100$  s. Z tak ustawionym  $t$  w zakresie 8-10 mag najmniejsze odchylenie standardowe pomiarów pozycji otrzymywano dla  $n = 15$  i  $r = 2,5$ , a w zakresie 10-13,5 mag dla  $n = 9$  i  $r = 1,5$ . Wartości wszystkich parametrów dla różnych jasności gwiazd i czasów ekspozycji podano w podsumowaniu.

## 1. Wstęp

W pracy zajmowano się porównaniem dokładności wyznaczenia pozycji gwiazd w pomiarach robionych w ramach projektu „Pi of the Sky”, w zależności od czasu naświetlania klatek i parametrów przyjmowanych przez algorytm astrometrii. Obliczenie dokładnej pozycji gwiazdy, zarejestrowanej na zdjęciu jako zbiór pikseli algorytm realizował, licząc średnią ważoną po jasnościach pikseli. Przy tym, do średniej brano pod uwagę jedynie jedynie  $n$  najjaśniejszych pikseli w obrazie.

W pierwszej części pracy szukano najbardziej korzystnych wartości  $n$ , w zależności od czasu naświetlania i jasności danej gwiazdy. Algorytm astrometryczny następnie przyjmuje tak obliczoną pozycję gwiazdy za wstępną i oblicza poprawioną pozycję, biorąc średnią ważoną (wg odległości od pozycji) po pikselach w kole o promieniu  $r$  pikseli. Odległość  $r$  nazwano aperturą, przez analogię do optycznej przysłony. Druga część pracy skupiała się więc na zbadaniu wpływu wielkości apertury na dokładność wyznaczenia pozycji.

## 2. Wstępne przetwarzanie danych

Pliki zawierały listy zlokalizowanych gwiazd z takimi danymi, jak rektascencja i deklinacja na sferze niebieskiej, jasność w magnitudo i analogiczne referencyjne dane z katalogu Tycho. Każdy plik zawierał dane z 14-42 kolejnych zdjęć. Pomiarów dla konkretnych gwiazd z danej próbki pomiarów otrzymywano obliczając średnie wielkości dla wszystkich obrazów gwiazdy na kolejnych zdjęciach (z tym samym id z katalogu). Zauważono, że wiele gwiazd pojawia się tylko na niektórych klatkach, więc odrzucano takie, które nie pojawiają się na dostatecznej ich liczbie. Ostatecznie wybrano próg 60% klatek, co oznaczało usunięcie około 30-40% gwiazd. Stwierdzono, że nie warto wybierać wyższego, gdyż znacznie to obcina wielkość próbki, zwłaszcza dla ciemnych gwiazd, a daje niewielki zysk dokładności wyznaczenia średnich wartości. Zdecydowano się za to na odrzucenie gwiazd z mniejszą liczbą zliczeń, gdyż mogły to być całkowicie błędne identyfikacje obrazów jakichś innych, ruchomych obiektów.

Użyty katalog gwiazd ma kilkanaście lat i średnio obserwowano dziewięć zmierzonych pozycji gwiazd od tych katalogowych o 2-3 odchylenia standardowe deklinacji (wyznaczone w kolejnych punktach), co czyni takie przypadki tym bardziej możliwymi. Oznacza to też, że źródłem błędnych zliczeń mogły być też zbyt bliskie sobie gwiazdy. Również algorytm astrometryczny mógł mieć problemy z właściwym rozdzieleniem złączonych ze sobą obrazów, dlatego usunięto wszystkie pary gwiazd położonych bliżej, niż suma ich „promieni”  $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$ , gdzie  $p$  jest liczbą pikseli obrazu gwiazdy. Takich gwiazd było około 10% w każdej próbce (przed usunięciem gwiazd z niedostateczną liczbą zliczeń). Zaobserwowano do kilkunastu gwiazd na próbkę, dla których rejestrowano po kilka zliczeń na klatkę i je również usuwano.

### 3. Ocena niepewności i sposób ich przedstawienia

Dla wszystkich zliczeń na kolejnych klatkach obliczano, dla danej zidentyfikowanej w katalogu gwiazdy, średnie wartości rektascensji  $\rho$ , deklinacji  $\theta$  i jasności, a także średnie odchylenia standardowe  $d\rho$  i  $d\theta$  zmierzonego położenia od położenia średniego. Jak wspomniano, odchylenia od położenia katalogowego były średnio 2-3 razy większe, niż od średniego.

Następnie całą serię danych poszczególnych gwiazd sortowano według jasności w mag i łączono w biny. Biny najpierw wybierano tylko dla jednej serii na wykres (np dla  $n = 15$  w punktach 4 i 5 i dla  $r = 2.5$  w punkcie 6), tak że odległość między średnimi jasnościami w binach wynosiła co najmniej 0.2 mag i w każdym binie musiało być co najmniej 40 gwiazd. Dla pozostałych czterech serii na danym wykresie tworzone biny tak, by dostać identyczne średnie jasności gwiazd w nich, jak w binach serii referencyjnej. Pozwoliło to dokładnie porównać odchylenia standardowe dla tak samo jasnych gwiazd, dzięki charakterystycznym „słupkom” punktów na wykresie.

Ponadto, korzystając ze wspomnianej referencyjnej serii, w czterech pozostałych seriach gwiazdom o takim samym id z katalogu przypisano takie same jasności, gdyż zależało nam, by porównywać dokładność wyznaczania pozycji tych samych gwiazd dla różnych parametrów. Zmiana apertury  $r$  mogła przynieść różnicę w pomiarze jasności bliską 1 mag. Dla zmian parametru  $n$  te wielkości były na ogół nie większe, niż 0.2 mag.

W binach obliczano średnie arytmetyczne  $d\theta$  i  $d\rho$ , ważone po liczbie klatek, na których zaobserwowano daną gwiazdę. Zaobserwowano, że uśrednione w binach odchylenie  $d\theta$  jest równe  $d\rho \cos \theta$  (promień koła postaci  $\rho = C$  na sferze niebieskiej skaluje się jak  $\cos \theta$ ) z dokładnością do ok 20%. Początkowo badano też bezwzględną odległość kątową na sferze, między zmierzonymi, a uśrednionymi położeniami gwiazd. Korzystając z definicji cosinusa, jako iloczynu skalarowego dwóch jednostkowych wektorów uzyskano wzór:

$$\cos d\alpha = \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\sin \rho_1 \sin \rho_2 + \cos \rho_1 \cos \rho_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Stwierdzono, że  $d\alpha \approx (1.4 \pm 0.2)d\rho$ .

Ostatecznie, z powodu tych obserwacji zdecydowano, że odchylenie standardowe deklinacji jest wystarczającą miarą niepewności oceny położenia gwiazd i je właśnie zdecydowano umieścić na wykresach. Prawie wszystkie wykresy zawierają 5 serii danych dla różnych  $n$ , lub  $r$ . Analizowano dane dla dwóch różnych kamer cam35 i cam10 i czterech czasów naświetlania: 3, 10, 30 i 100 sekund, dlatego też w każdym z poniższych punktów zajmowano się ośmioma wykresami.

### 4. Zależność dokładności oceny położenia gwiazdy od liczby użytych pikseli dla dużych $n$

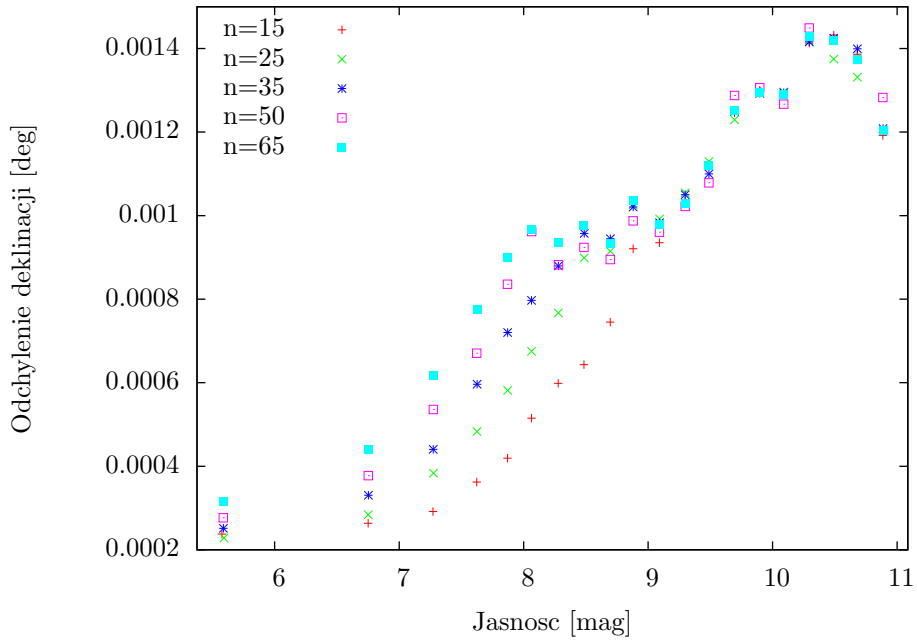
Badano serie danych dla  $n \in \{15, 25, 35, 50, 65\}$ . Wykresy przedstawiono na Rysunkach od 4.1 do 4.8.

**Czas naświetlania 3 s.** Wykresy dla 3-sekundowego naświetlania przedstawiono na Rysunkach 4.1 i 4.2. Powyżej 7 mag mamy widoczny przedział liniowego wzrostu dyspersji, aż do wartości 0.001 stopnia. W przedziale od 7 do 9 mag odnotowujemy, jak widać, zysk dokładności biorąc jak najmniejsze  $n$ .

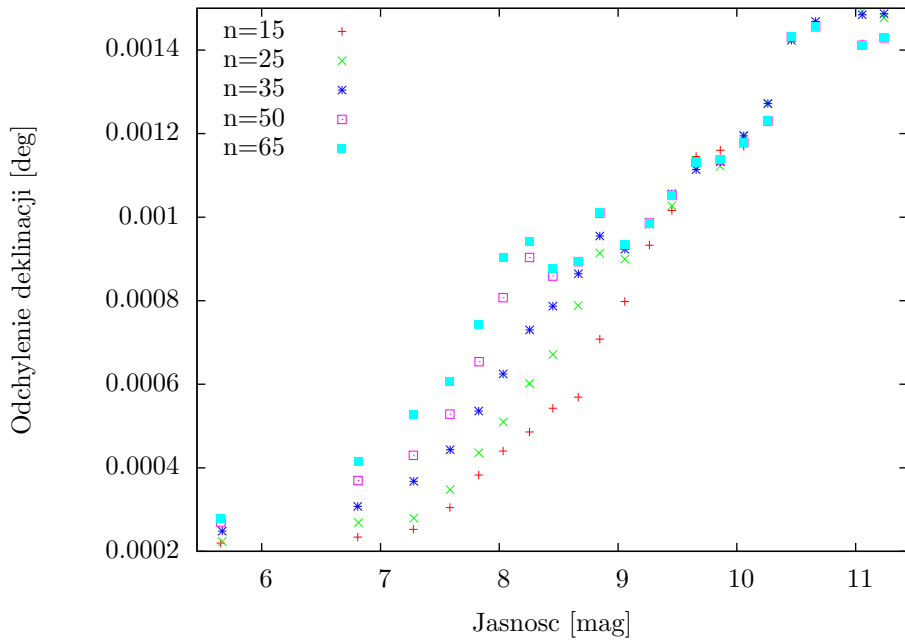
Dla ciemniejszych dostajemy z kolei dyspersja wydaje się niezależne od  $n$ , co można łatwo uzasadnić tym, że przy takim czasie naświetlania dla jasności 9 mag dostajemy około 15-pikselowy obraz gwiazdy i niezależnie od wybranej wartości  $n$  algorytm i tak bierze wszystkie piksele. Analogicznie, punkty w których proste dla innych wartości  $n$  przecinają prostą  $d\theta = 0,001^\circ$  okazują się być punktami w których obrazy gwiazd mają dokładnie  $n$  pikseli. Ostatnią rzeczą, która rzuca się w oczy, to stosunkowo niewielki zysk z małego  $n$  dla bardzo jasnych gwiazd. Może to oznaczać, że wtedy mamy w środku obrazu dużo nasyconych pikseli i nie da się już dokładnie wybrać zbyt małej liczby najjaśniejszych.

**Czas naświetlania 10 sekund** Tak jak i w poprzednim paragrafie, na Rysunkach 4.4 i 4.3 można zauważyć granicę 15 pikseli w obrazie, tyle, że przy dłuższym naświetlaniu odpowiada ona 10 magnitudo. Efekt nasycenia dla jasnych gwiazd staje się silniejszy (czego można było się spodziewać) i dla najjaśniejszych gwiazd poniżej 6.5 mag najbardziej opłacalnym wyborem wydaje się  $n = 25$ . Dla całej reszty możemy wziąć  $n = 15$

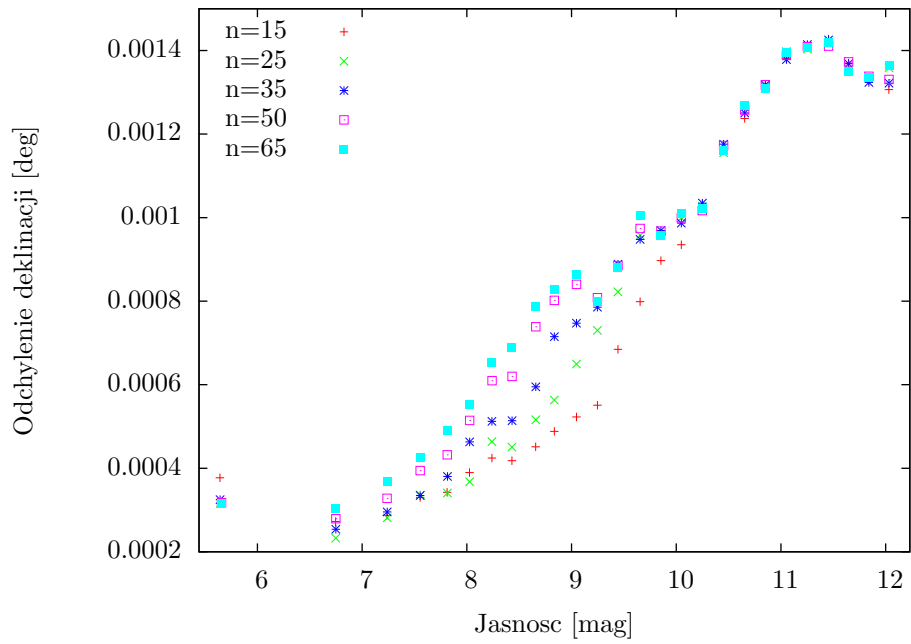
Rysunek 4.1: Kamera 35, czas naświetlania 3 s



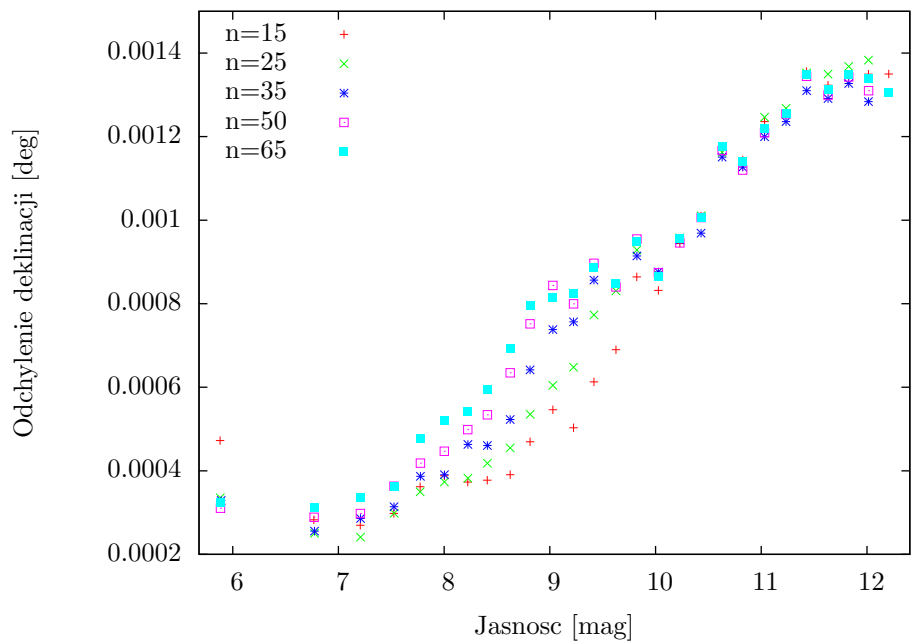
Rysunek 4.2: Kamera 10, czas naświetlania 3 s



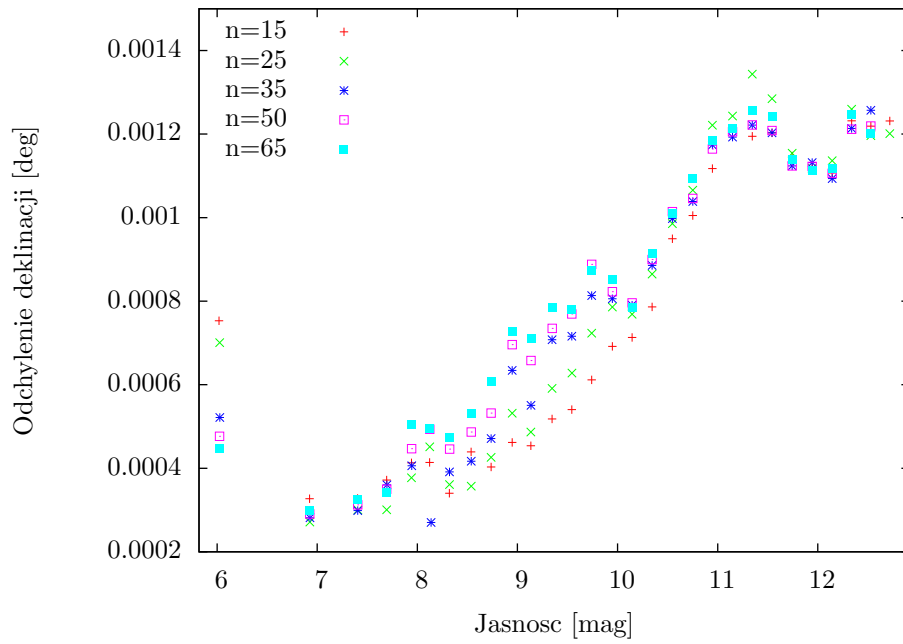
Rysunek 4.3: Kamera 35, czas naświetlania 10 s



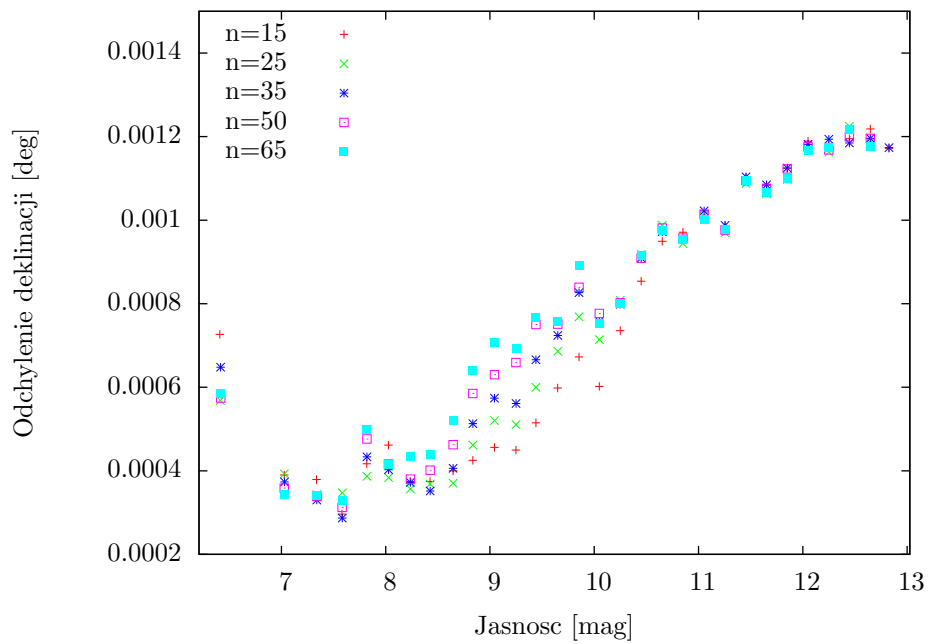
Rysunek 4.4: Kamera 10, czas naświetlania 10 s



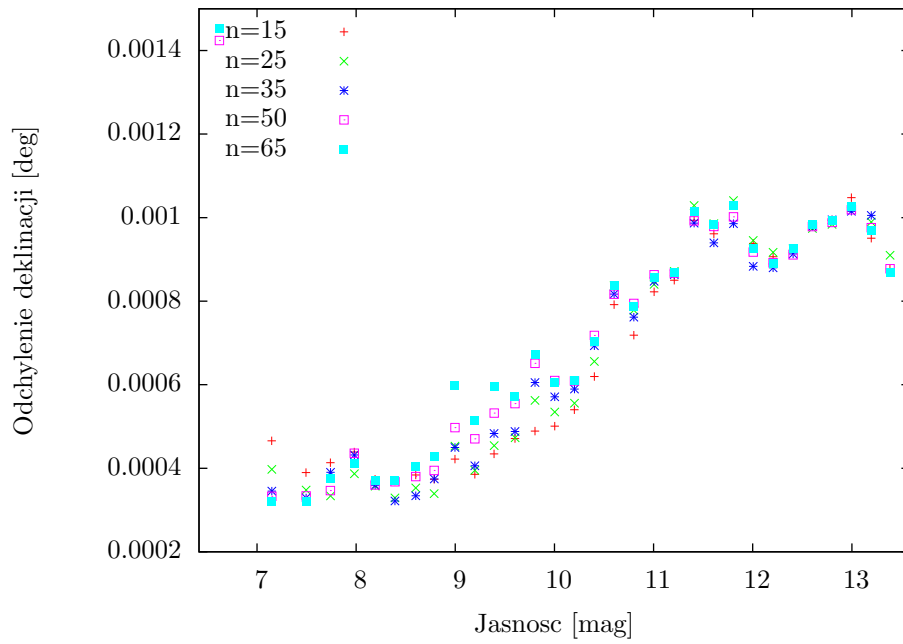
Rysunek 4.5: Kamera 35, naświetlanie 30 s



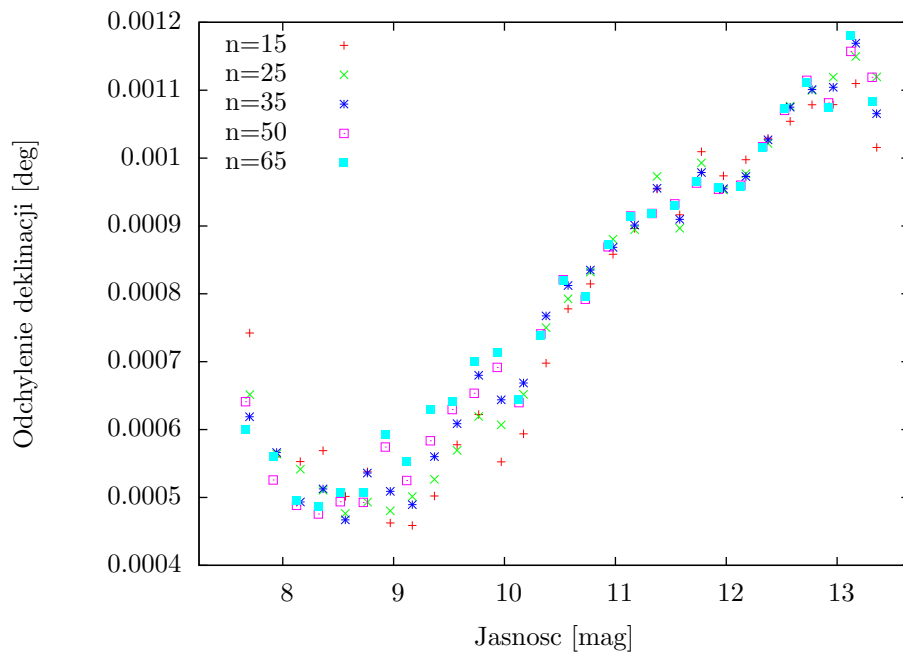
Rysunek 4.6: Kamera 10, naświetlanie 30 s



Rysunek 4.7: Kamera 35, czas naświetlania 100 s



Rysunek 4.8: Kamera 10, czas naświetlania 100 s



**Czasy naświetlania 30 i 100 sekund** Znowu, zgodnie z przewidywaniami, widać dramatyczny spadek dokładności dla małych  $n$  i jasnych gwiazd. Można stwierdzić, że do około 8 mag dla 100 sekund i 7 mag dla 30 sekund opłaca się wybrać np  $n = 50$ . Z kolei  $n = 65$  daje takie same, lub minimalnie lepsze rezultaty, co sugeruje, że dalsze zwiększanie  $n$  nie przyniesie większych korzyści. Powyżej, do około 10 mag dla 30 sekund i 11 mag dla 100 sekund najbardziej opłacalnym wyborem jest  $n = 15$ . Dla ciemniejszych gwiazd mamy już poniżej 15 pikseli na obraz.

**Podsumowanie** Najbardziej opłacalnym wyborem w najszerszym zakresie jasności gwiazd i czasów naświetlania wydaje się  $n = 15$ , dlatego też w punkcie kolejnym wykonano wykresy dla jeszcze mniejszych wartości  $n$ . Większe  $n$  znajdują zastosowanie dla bardzo jasnych gwiazd i długich czasów naświetlania.

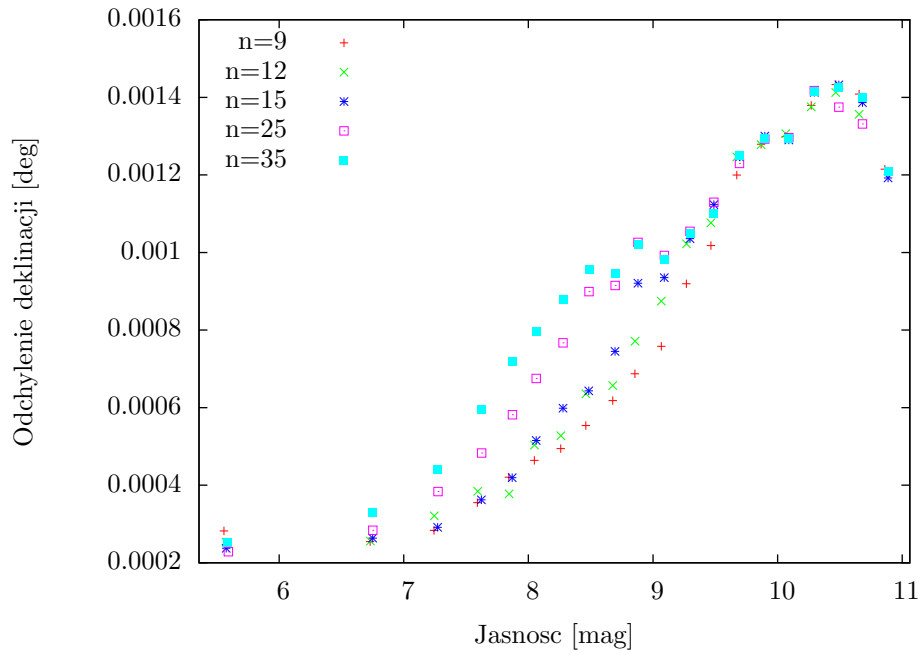
## 5. Zależność dokładności oceny położenia gwiazdy od liczby użytych pikseli dla małych wartości $n$

**Czas naświetlania 3 s.** Jak widać na Rycinach 5.1 i 5.2, dla 3 s ekspozycji  $n = 9$  jest wyraźnie najlepszym wyborem w zakresie od 7 do 9,5 mag. Ciemniejsze gwiazdy mają najwyraźniej poniżej 9 pikseli, więc wybór  $n$  nie ma znaczenia. Z kolei dla gwiazd jaśniejszych, niż 7 mag dochodzi do głosu efekt nasycenia matrycy i nie da się dokładnie wybrać  $n$  najjaśniejszych pikseli, jeśli ta liczba jest zbyt mała, dlatego warto wybrać np  $n = 15$ .

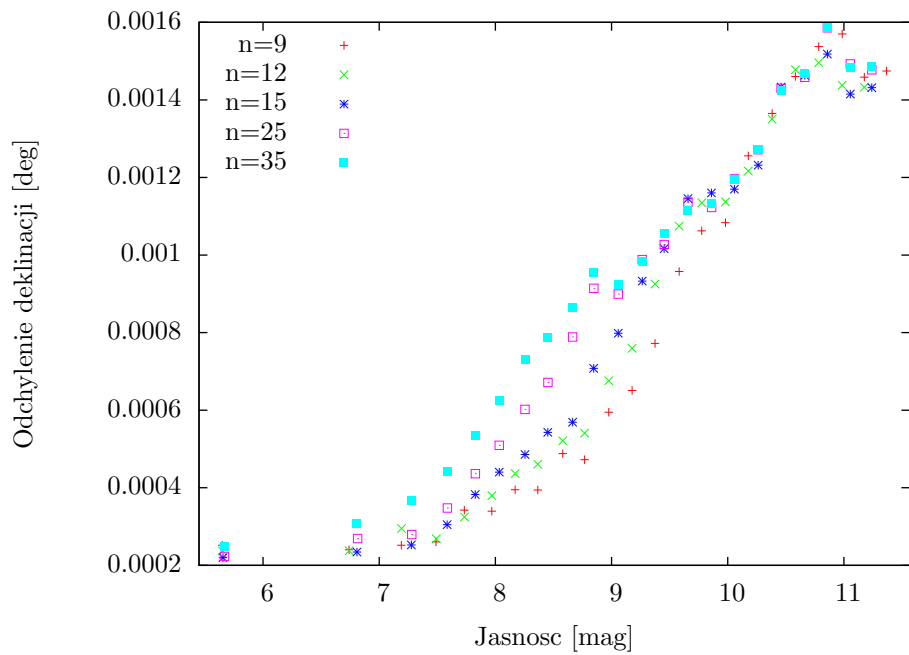
**Czas naświetlania 10 s.** Na Rycinach 5.3 i 5.4 można zauważyć bardzo podobny schemat. Tym razem obszar wpływu nasycenia matrycy jest znacznie większy i sięga obiektów o jasności do 8,6 mag, a strata dokładności dla  $n = 9$  lub 12 jest bardziej wyraźna. Jakikolwiek zysk z tych wartości jest już mniejszy i widoczny tylko w wąskim zakresie 9-10,5 mag. Dla jaśniejszych gwiazd nadal warto wybrać  $n=15$ .

**Czasy naświetlania 30 s i 100 s** W tych wypadkach obszar wpływu nasycenia mamy aż do odpowiednio 9,5 i 10 mag, a zakres w którym dostajemy realnie mniejsze odchylenie  $d\theta$  dla  $n = 9$  lub 12 praktycznie nie występuje, więc pozostają aktualne rezultaty z poprzedniego punktu.

Rysunek 5.1: Kamera 35, czas naświetlania 3 s

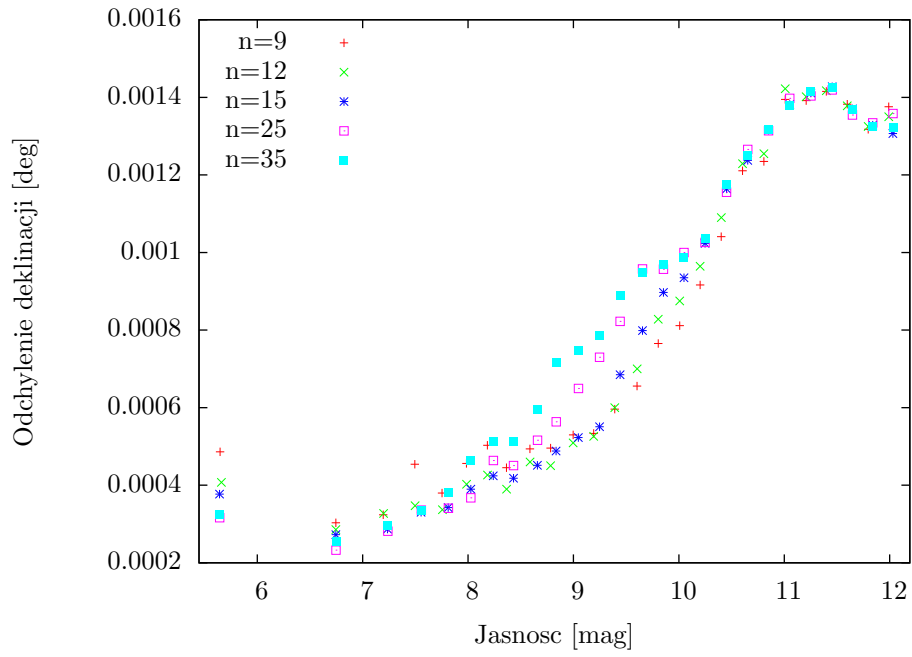


Rysunek 5.2: Kamera 10, czas naświetlania 3 s

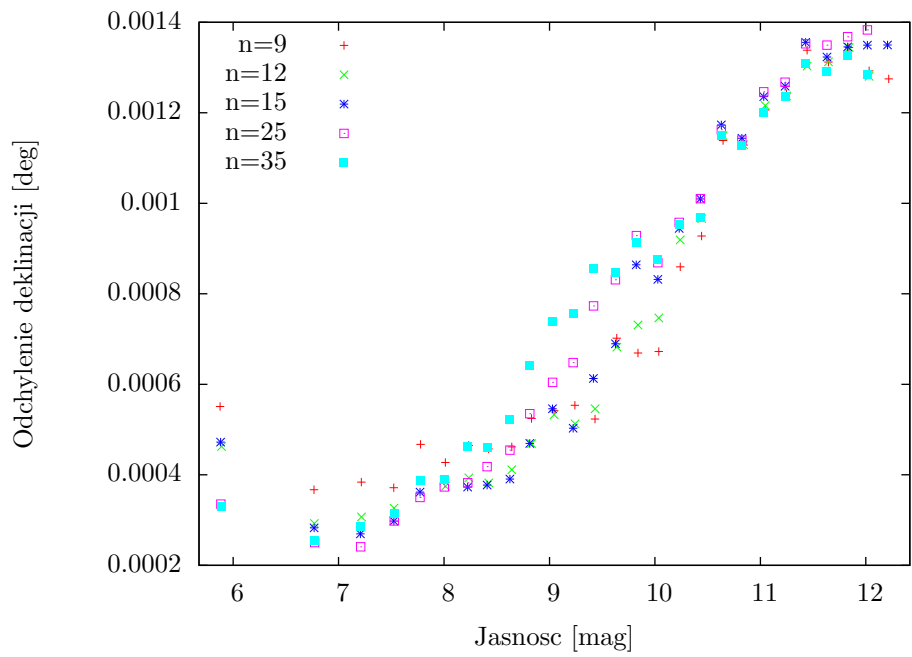




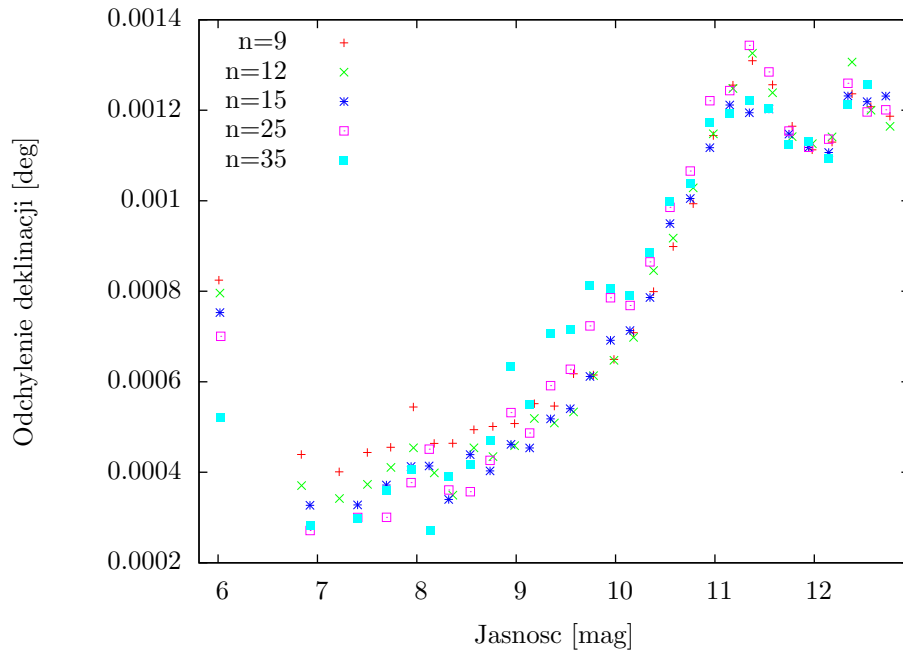
Rysunek 5.3: Kamera 35, czas naświetlania 10 s



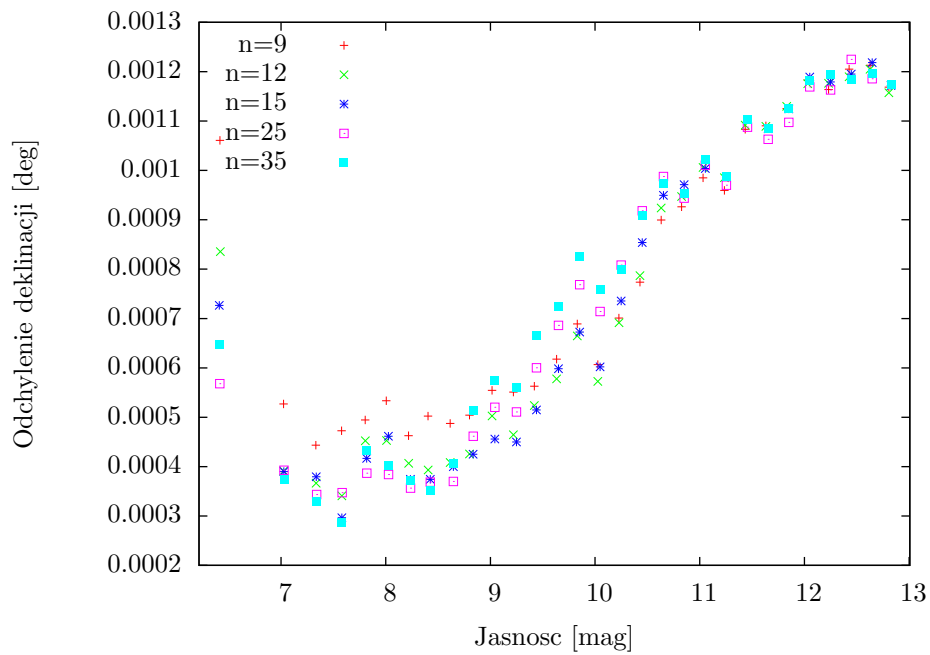
Rysunek 5.4: Kamera 10, czas naświetlania 10 s



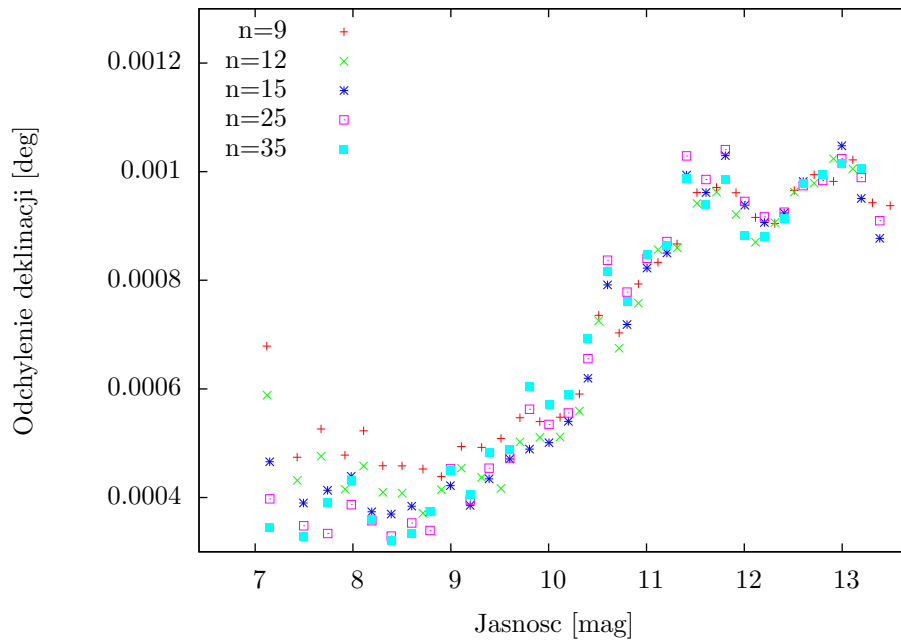
Rysunek 5.5: Kamera 35, naświetlanie 30 s



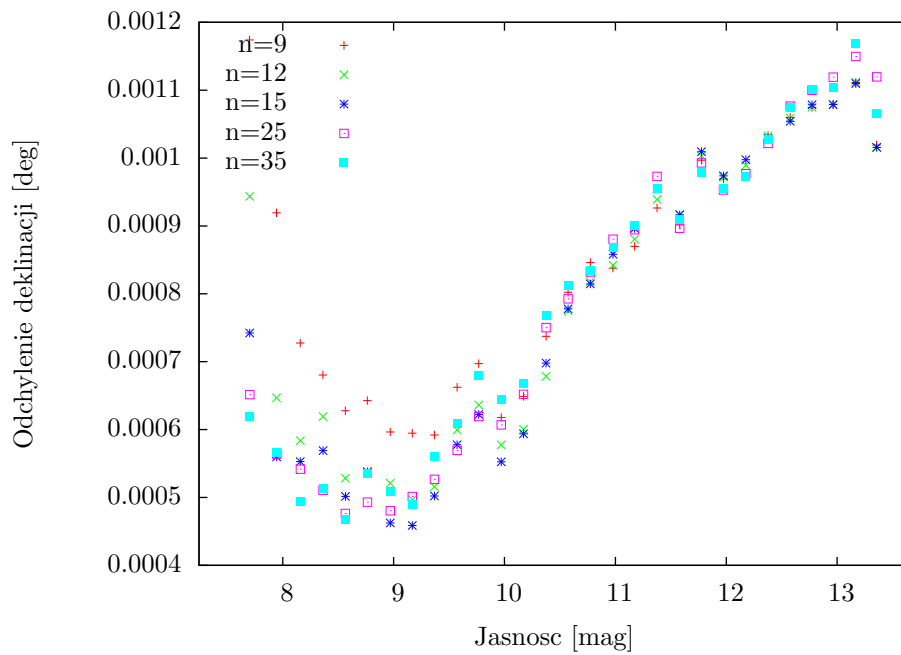
Rysunek 5.6: Kamera 10, naświetlanie 30 s



Rysunek 5.7: Kamera 35, czas naświetlania 100 s



Rysunek 5.8: Kamera 10, czas naświetlania 100 s



## 6. Zależność dokładności oceny położenia gwiazdy od apertury

Algorytm oblicza poprawioną pozycję gwiazdy, biorąc średnią ważoną z pikseli w danej odległości mniejszej niż  $r$  od uprzednio zmierzonej pozycji (ważoną po odległości). Poniższe wykresy na Rycinach od 6 do 6 przedstawiają wyniki obliczeń dokładności dla różnych wartości  $r$  w zależności od jasności gwiazdy i dla  $n = 15$  pikseli używanych do wyznaczania wstępnej pozycji. Jak wspomniano, dla różnych  $r$  uzyskiwano diametralnie różne jasności gwiazd zidentyfikowanych jako takie same w katalogu, nawet o 1 magnitudo i co więcej odchylenia te nie zachowywały się regularnie, np dla jasnych gwiazd mogliśmy mieć zwiększoną jasność, a dla ciemnych zmniejszoną, dla dużej apertury. To ostatnie można tłumaczyć tym, że dla „małej“ gwiazdy algorytm astrometryczny brał pod uwagę piksele, które nie należą do jej obrazu. Wyraża się to również tym, że wyniki dla ciemnych gwiazd i dużych apertur są gorsze, niż te bez poprawki, oznaczone liniami na wykresach,

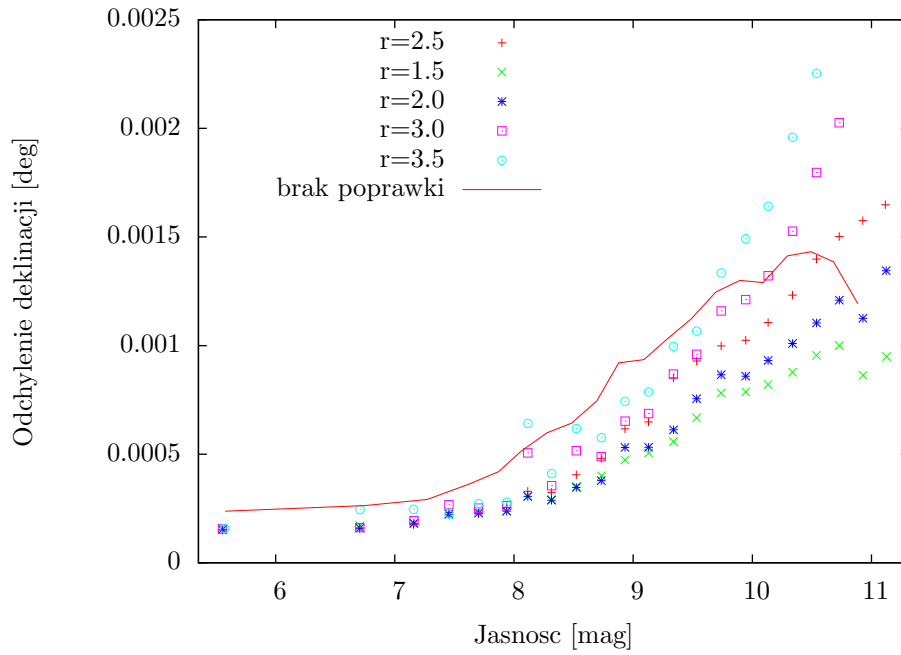
**Czas naświetlania 3 sekundy.** Dla jasnych gwiazd widzimy, że wybór apertury praktycznie nie robi różnicy. Linie kolejnych serii rozchodzą się około 8 magnitudo i powyżej tej wartości najkorzystniejszym wyborem okazuje się  $r = 1.5$ , a najmniej korzystnym  $r = 3.5$ . Ponownie, duża dyspersja dla dużej apertury może wynikać z brania pod uwagę praktycznie ciemnych pikseli dla małych gwiazd. W kole o promieniu 3.5 możemy znaleźć około 40 pikseli, czyli biorąc tak dużą aperturę poniekąd powtarzamy błąd, którego pozbyliśmy się wcześniej, biorąc  $n = 15$  pikseli do określenia wstępnej pozycji. Reasumując, dla 3-sekundowego naświetlania warto wybrać małe  $r$ .

**Czas naświetlania 10 sekund.** Różnicą w porównaniu z poprzednim przypadkiem jest lepsza dokładność dla jasnych gwiazd i dużych apertur. Poprawka z aperturą polega na różnicach w jasności wybranych pikseli, a te w pobliżu środka obrazu gwiazdy są silniej nasycone dla coraz dłuższych czasów naświetlania. Reasumując, dla gwiazd do 10 magnitudo, najlepszym wyborem wydaje się  $r = 2.0$ . Dla ciemnych gwiazd odnotowujemy poprawę dokładności dla dużych  $r$ , w porównaniu z 3 sekundowym naświetlaniem, ale nadal zdecydowanie najlepsze rezultaty daje w tym zakresie  $r = 1.5$ . Wynika to pewnie z tego, że piksele z brzegów obrazów rejestrują więcej światła.

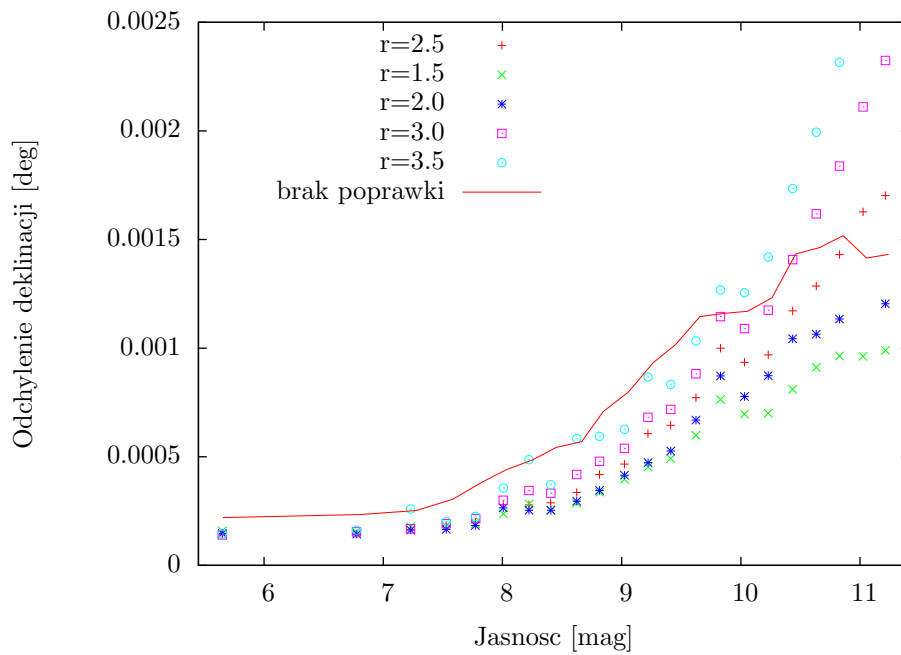
**Czas naświetlania 30 sekund** Podobnie jak w przypadku 10 sekund, od 7 do około 11 mag opłaca się wybrać  $r = 2.0$ , powyżej  $r = 1.5$ . Efekt zysku dokładności dla jasnych gwiazd i dużych apertur wydaje się nasilony, zgodnie z oczekiwaniami. Podobnie strata dla ciemnych gwiazd przy dużych  $r$  jest mniejsza. Zaskakującym wynikiem jest to, że dla gwiazd jaśniejszych, niż 7 mag warto użyć starego algorytmu bez obliczania poprawki z aperturą.

**Czas naświetlania 100 sekund** Jak widać, opłaca się wybrać  $r = 2.0$  dla gwiazd z zakresu 9-11 mag i  $r = 1.5$  dla ciemniejszych. Dla gwiazd jaśniejszych, niż 7 mag (wyniki nie są konsyistentne dla różnych zdjęć) warto w ogóle zrezygnować z poprawki do algorytmu. W zakresie 8-9, lub 7-9 mag warto wybrać  $r$  równe 3.0, lub 3.5.

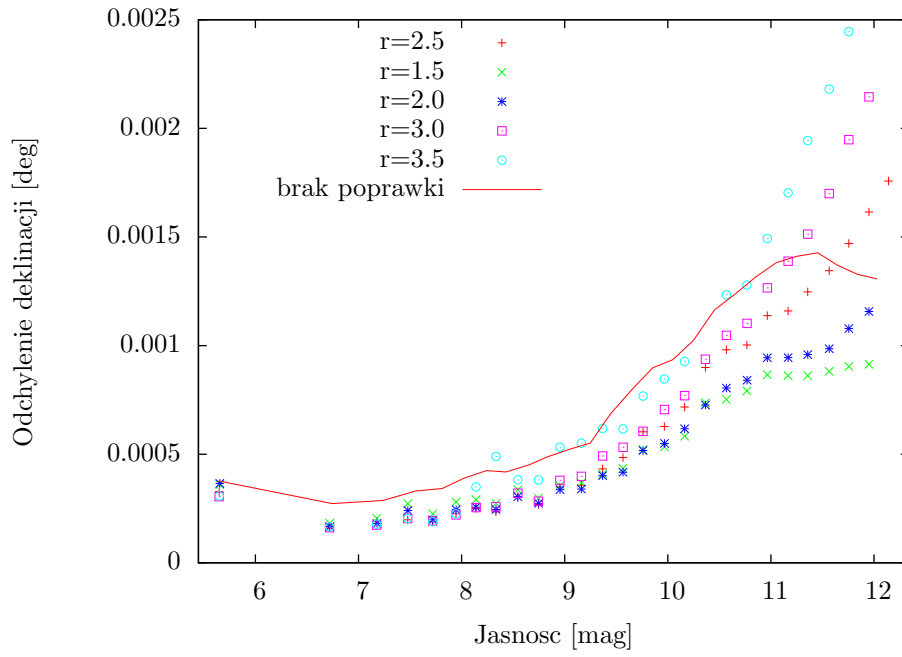
Rysunek 6.1: Kamera 35, czas naświetlania 3 s



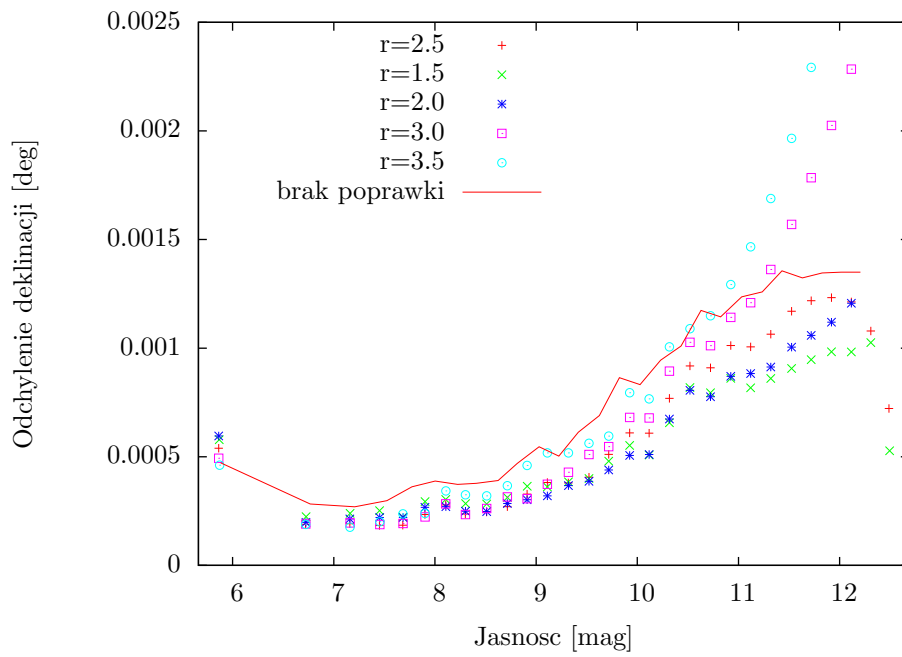
Rysunek 6.2: Kamera 10, czas naświetlania 3 s



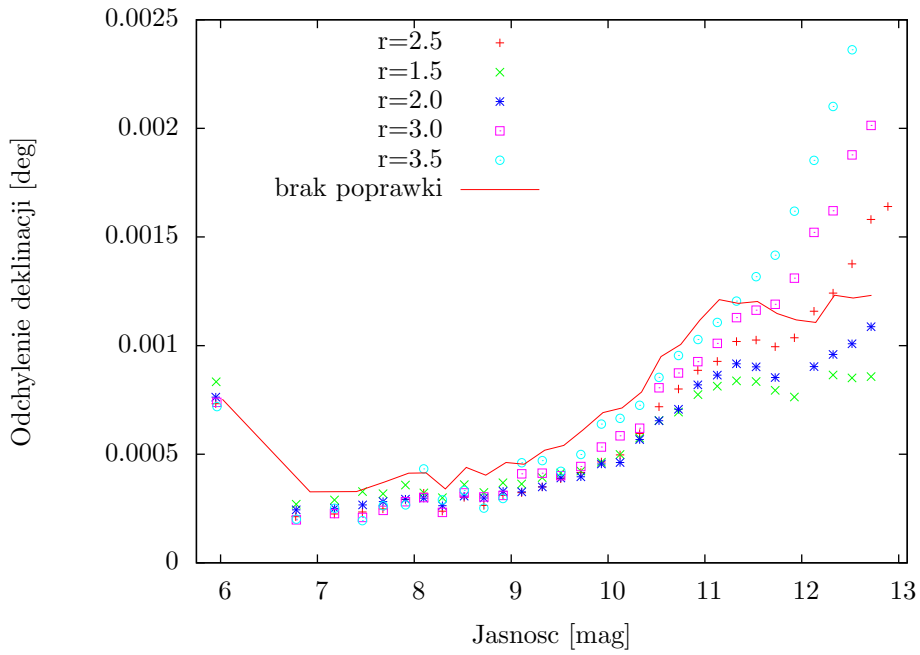
Rysunek 6.3: Kamera 35, czas naświetlania 10 s



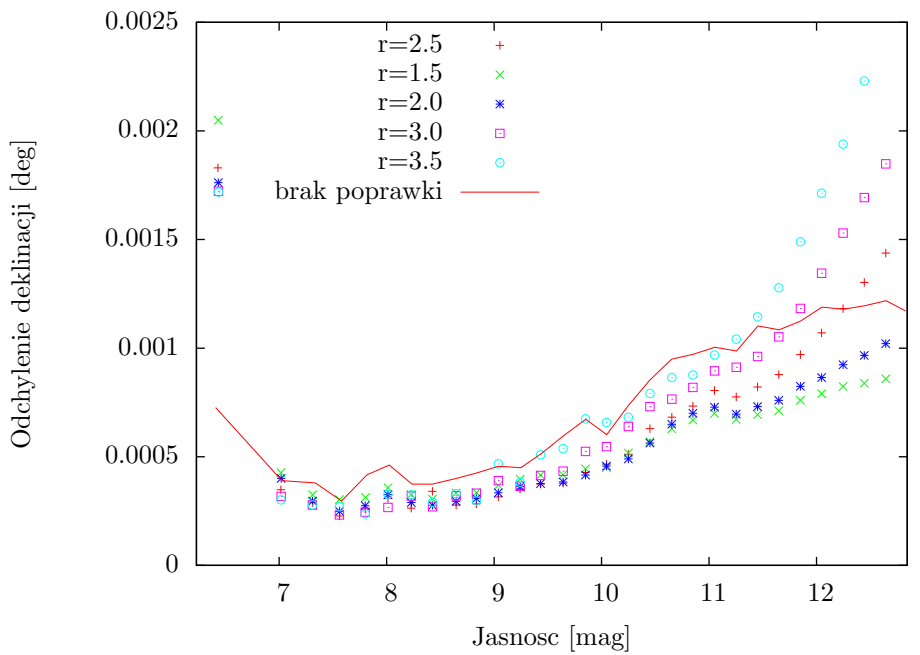
Rysunek 6.4: Kamera 10, czas naświetlania 10 s



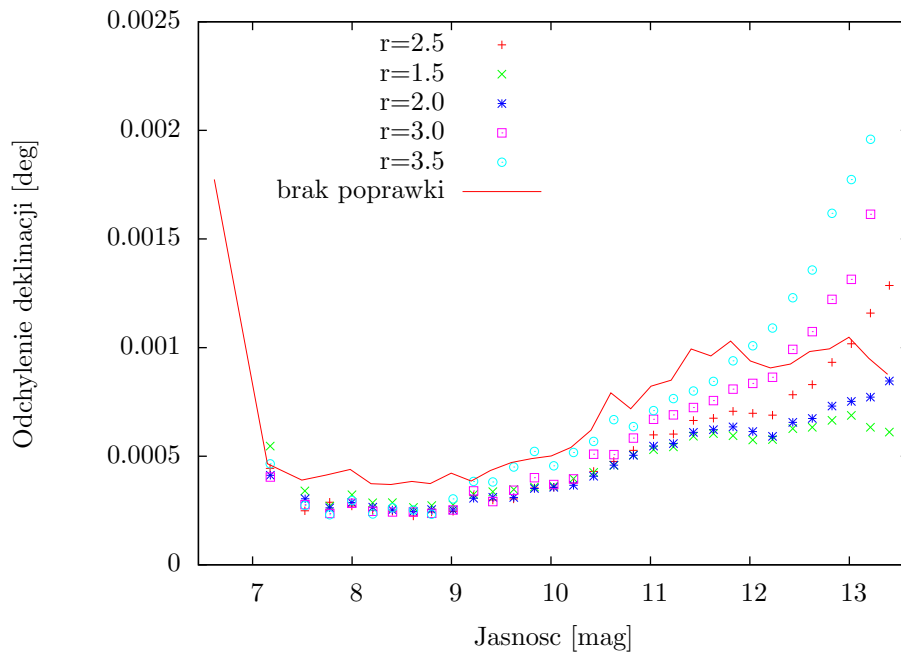
Rysunek 6.5: Kamera 35, czas naświetlania 30 s



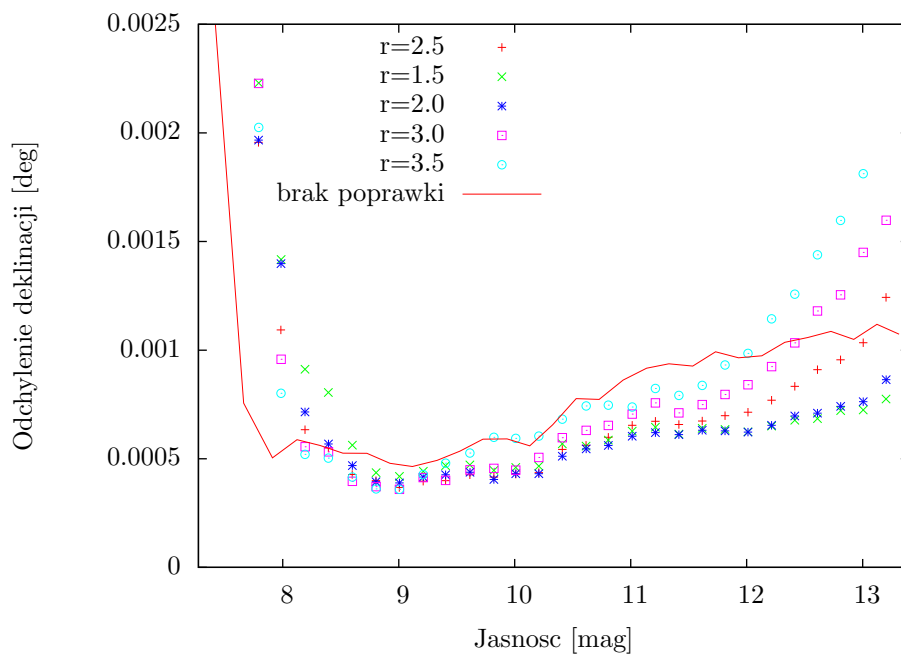
Rysunek 6.6: Kamera 10, czas naświetlania 30 s



Rysunek 6.7: Kamera 35, czas naświetlania 100 s



Rysunek 6.8: Kamera 10, czas naświetlania 100 s





## 7. Podsumowanie

**Pomiar pozycji gwiazd do 7 mag** Wyniki pomiarów wskazują jednoznacznie, że najmniejsze odchylenia na poziomie 0,002 stopnia uzyskujemy dla czasu naświetlania  $t$  3 sekundy i  $n = 25$ . Wielkość apertury jest w tym wypadku bez znaczenia. Zwiększanie czasu naświetlania drastycznie obniża dokładność wyznaczania pozycji tych gwiazd (np dla 10s jest to już co najmniej o 50% większe odchylenie deklinacji). Część strat możemy zniwelować ustawiając duże  $n$  i dużą aperturę. Okazuje się, że dla czasów naświetlania 30 i 100 sekund w ogóle warto zrezygnować z poprawionego algorytmu

**Pomiar pozycji gwiazd od 7 do 8 mag** Jak widać na wykresach, dla prawie wszystkich czasów naświetlania uzyskujemy w tym zakresie odchylenie około 0.0002 stopnia dla 7 mag i 0.0004 dla 8 mag. Jedynie dla  $t = 100$  s mamy znacznie gorszą dokładność około 7 mag, jednak nieco lepszą dla 8 mag. Dla większych czasów naświetlania mamy niewielki zysk dokładności dla dużej apertury. W skrajnym wypadku dla  $t = 100$  s warto wziąć algorytm bez poprawki, obliczający po prostu pozycję z  $n$  pikseli.

**Pomiar pozycji gwiazd w zakresie jasności od 8 do 10 mag** Najmniejsze odchylenie  $d\theta$ , poniżej 0.0004 stopnia w całym zakresie obserwujemy dla  $t = 100$  s i  $t = 30$  s. W pobliżu 10 mag dodatkowy zysk daje  $r = 2.0$  i  $n = 25$  dla  $t = 100$ s i  $n = 15$  i  $r = 2.0$  dla 30 s. Przy krótszym naświetlaniu  $d\theta$  rośnie szybko w miarę zmniejszania się jasności, do 0.0006 – 0.0008 stopni dla 10 mag.

**Pomiar pozycji gwiazd ciemniejszych, niż 10 mag** Najdokładniejsze pomiary z  $d\theta \approx 0.0005^\circ$  i największy zakres jasności zarejestrowanych gwiazd dostajemy, jak można się było spodziewać, dla 100-sekundowej ekspozycji. Parametr  $n$  ma znaczenie tylko dla jaśniejszych gwiazd i pewien widoczny zysk dostajemy dla  $n = 9$ . Bardzo dużą korzyść daje ustawienie apertury na 1.5 piksela, podobnie, jak dla wszystkich pozostałych czasów ekspozycji.

Największą dyspersję  $d\theta \approx 0.001^\circ$  dostajemy dla 3-sekundowego naświetlania. Ponadto taka ekspozycja pozwala zarejestrować tylko gwiazdy jaśniejsze, niż 11 mag. Parametr  $n$  jest zaś zupełnie bez znaczenia w całym omawianym zakresie.

Proponowany dobór parametrów przestawiono w Tabeli 1.

Tabela 1: Proponowane parametry astrometrii w zależności od czasu naświetlania

$t$ [s]	<7 mag		7-8 mag		8-10 mag		>10 mag	
	$n$	$r$	$n$	$r$	$n$	$r$	$n$	$r$
3	25	dow.	12	2.0	9	1.5	dow.	1.5
10	25	3.5	25	2.5	12	1.5	9	1.5
30	65	brak	35	3.5	15	2.0	9	1.5
100	65	brak	35	brak/3.5	15	2.5	9	1.5